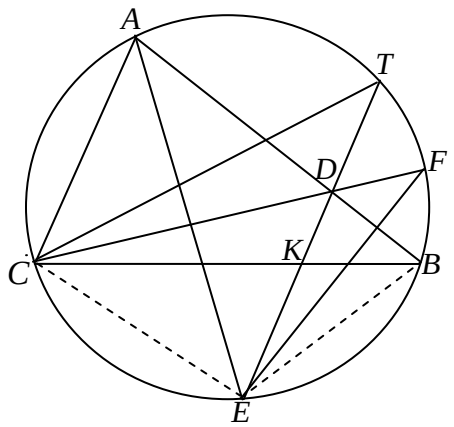
IV ტური

4. ვთქვათ ABC ისეთი სამკუთხედია, რომ $AC < AB < CB$. AB გვერდზე აღებულია D წერტილი ისე, რომ $AC = AD$. სამკუთხედის A კუთხის ბისექტრისა და CD წრფე ABC სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირს მეორედ კვეთენ შესაბამისად E და F წერტილებში. ვთქვათ K არის BC და DE წრფეების გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ $\frac{CK}{AC}$, თუ ცნობილია, რომ $DK \cdot EF = AC \cdot DF$.

ამოხსნა



ვთქვათ ED წრფის წრეწირთან მეორე გადაკვეთის წერტილი არის T. ცხადია, რომ ΔCTD მსგავსია ΔEFD –ის, ამიტომ

$$\frac{EF}{CT} = \frac{DF}{DT}.$$

შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან $AC = AD$ და AE არის A კუთხის ბისექტრისა, ამიტომ AE წრფე იქნება CD მონაკვეთის შუამართობი. მაშინ $CE = ED = EB$.

გვაქვს: $\angle AEF = \angle ACF = 90^\circ - \angle CAE = 90^\circ - \angle DAE$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $EF \perp DB$. მაშასადამე $\angle DEF = \angle BEF$.

გვაქვს: $\angle TCD = \angle DEF = \angle FEB = \angle FCB = \angle DCK$. მაშასადამე CD არის TCK სამკუთხედის C კუთხის ბისექტრისა, ამიტომ $\frac{CT}{CK} = \frac{TD}{DK}$. ახლა თუ მიღებულ პროპორციებს შევაჯერებთ, გვექნება $\frac{EF}{DF} = \frac{CK}{DK}$, საიდანაც ვიღებთ $EF \cdot DK = DF \cdot CK$, ეს კი ამოცანის პირობაში მოცემულ $DK \cdot EF = AC \cdot DF$ ტოლობასთან ერთად გვაძლევს, რომ $\frac{CK}{AC} = 1$

პასუხი: $\frac{CK}{AC} = 1$

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ $\frac{EF}{CT}=\frac{DF}{DT}$;

ბ) დაადგინა, რომ $CE=ED=EB$;

გ) დაადგინა, რომ $EF \perp DB$;

დ) დაადგინა, რომ CD არის TCK სამკუთხედის C კუთხის ბისექტრისა;

ე) დაადგინა, რომ $\frac{CT}{CK}=\frac{TD}{DK}$;

ვ) დაადგინა, რომ $\frac{EF}{DF}=\frac{CK}{DK}$;

ზ) დაადგინა, რომ $\frac{CK}{AC}=1$.

შეფასების სქემა

1 ქულა- ა)
2 ქულა- ა), ბ)
3 ქულა- ა), ბ), გ)
4 ქულა- ა), ბ), გ), დ)
5 ქულა- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქულა- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქულა- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

5. ჩოგბურთის ტურნირში მონაწილეობს n მოთამაშე. ყოვლი ორი მათგანი ერთმანეთს ხვდება მხოლოდ ერთხელ. დაამტკიცეთ, რომ თუ ყოველი m მოთამაშისთვის არსებობს ერთი მაინც მოთამაშე რომელმაც მოუგო ამ m მოთამაშეს, მაშინ $n \geq 2^{m+1} - 1$. (შეგახსენებთ, რომ ჩოგბურთში ყოველ ორ მოთამაშეს შორის შეხვედრა მთავრდება ერთ-ერთი მოთამაშის გამარჯვებით.)

ამოხსნა

დავამტკიცოთ ამოცანის დებულება მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით. $P(m)$ იყოს წინადადება: "თუ ტურნირში ყოველი m მოთამაშისთვის არსებობს ერთი მაინც მოთამაშე რომელმაც მოუგო ამ m მოთამაშეს, მაშინ $n \geq 2^{m+1} - 1$."

$P(1)$ ჭეშმარიტია. მართლაც, თუ $m = 1$ მაშინ აუცილებლად არის ერთი მაინც მოთამაშე და ამიტომ უნდა არსებობდეს მეორე მოთამაშე b რომელმაც მას მოუგო. თავის მხრივ b-თვისაც უნდა არცებობდეს მოთამაშე c რომელთანაც b-მ წააგო. ანუ გვყავს სამი მოთამაშე მაინც და ამიტომ $P(1)$ სრულდება.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $P(m)$-დან გამომდინარეობს $P(m+1)$.

შევნიშნოთ, რომ არსებობს მოთამაშე რომელსაც ტურნირის დასრულების შემდეგ აქვს მოგებების არანაკლები რაოდენობა ვიდრე წაგებების. მართლაც ასეთი მოთამაშის არ არსებობის შემთხვევაში მოგებების საერთო რაოდენობა იქნებოდა წაგებების საერთო რაოდენობაზე ნაკლები, ეს კი შეუძლებელია ვინაიდან მოგებების საერთო რაოდენობა ტოლია წაგებების საერთო რაოდენობის და ტოლია შეხვედრების საერთო რაოდენობის. განვიხილოთ ასეთი მოთამაშე a. M იყოს სიმრავლე ყველა იმ მოთამაშეებისა ვისთანაც a-მ წააგო, ხოლო N იყოს ყველა იმ მოთამაშეთა სიმრავლე ვისაც a-მ მოუგო. ამრიგად $|M| \leq |N|$-ზე. ($|X|$-ით აღნიშნულია X სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობა.)

ცხადია, რომ M-ში არის m ელემენტზე მეტი ელემენტი. წინააღმდეგ შემთხვევაში $M \cup a$ სიმრავლეში იქნება $m+1$-ზე ნაკლები ან ტოლი ელემენტი და ამ სიმრავლისთვის არ მოიძებნება მოთამაშე ვინც ამ სიმრავლის ყველა მოთამაშეს მოუგო, (ის ვერ იქნება N-ში რადგანაც N-ის ყოველ ელემენტს წაგებული აქვს a-თან) ანუ არ სრულდება $P(m+1)$-ის პირობა.

განვიხილოთ ახლა M სიმრავლის ნებისმიერი m მოთამაშისგან შედგენილი ქვესიმრავლე და ეს სიმრავლე გავაერთიანოთ a-სთან. მივიღებთ მოთამაშეთა ქვესიმრავლეს რომელშიც $m+1$ ელემენტია. ამიტომ $P(m+1)$-ის პირობის თანახმად არსებობს მოთამაშე , რომელმაც ამ სიმრავლის ყველა მოთამაშეს მოუგო. ეს მოთამაშე ცხადია ეკუთვნის M სიმრავლეს. რაც ნიშნავს, რომ M სიმრავლის ყოველ m ელემენტიანი ქვესიმრავლისთვის არსებობს მოთამაშე ისევ M სიმრავლეში, რომელმაც მოუგო ამ m მოთამაშეს. ანუ M-სიმრავლისთვის სრულდება $P(m) -$ ის პირობა. ჩვენ დავუშვით, რომ $P(m)$ ჭეშმარიტია, ამიტომ $|M| \geq 2^{m+1} - 1$. ამრიგად სულ $M \cup a \cup N$ მოთამაშეთა

სიმრავლეში გვაქვს $|M| + 1 + |N| \geq 2|M| + 1 \geq 2^{m+2} - 1$ ელემენტი და ვღებულობთ, რომ $P(m+1)$-იც ჭეშმარიტია. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ამოხსნის ეტაპები

ა) აჩვენა იმ მოთამაშის არსებობა, რომელსაც ტურნირის დამთავრების შემდეგ, არანაკლები მოგება აქვს ვიდრე წაგება;
ბ) გამოყო ა) პუნქტში ნახსენები მოთამაშე a და მოთამაშეთა მთელი სიმრავლე დაყო ორ ნაწილად, ვინც მოუგო a-ს და ვისაც მოუგო a-მ.
გ) აჩვენა, რომ სიმრავლე "ვინც მოუგო a -ს" აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას უფრო ნაკლები m-თვის.
დ) გამოიყენა მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი და დაასრულა დამტკიცება.

შეფასების სქემა

2 ქულა- ა)
3 ქულა- ა), ბ)
5 ქულა- ა), ბ), გ)
7 ქულა- გ), დ)

6. მოცემულია პოლინომი $P(x) = (x + d_1)(x + d_2) \cdot \ldots \cdot (x + d_9)$, სადაც $d_1, d_2, \ldots, d_9$ ერთმანეთისაგან განსხვავებული მთელი დადებითი რიცხვებია. ვთქვათ $d = max\,\{d_1, d_2, \ldots, d_9\}$, ხოლო m ნებისმიერი მთელი რიცხვია, რომელიც მეტია d^8-ზე . დაამტკიცეთ, რომ $P(m)$-ს გააჩნია მარტივი გამყოფი, რომელიც მეტია 20-ზე.

ამოხსნა

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ანუ არსებობს ნატურალური რიცხვი $x > d^8$, ისეთი, რომ $P(x)$- ის მარტივ მამრავლებად დაშლაში მონაწილეობს მხოლოდ და მხოლოდ იმ მარტივი რიცხვების ხარისხები, რომლებიც ნაკლებია 20-ზე. ვინაიდან გვაქვს მხოლოდ რვა ცალი მარტივი რიცხვი , რომლებიც ნაკლებია 20-ზე, ამიტომ ყოველი i-თვის, სადაც $1 \leq i \leq 9$, $x + d_i$ უდრის პირველი რვა ცალი მარტივი რიცხვების ხარისხების ნამრავლს. ცხადია, რომ $x + d_i > x > d^8$, ამიტომ არსებობს ისეთი მარტივი რიცხვი $p_i < 20$ და ნატურალური რიცხვი α_i, რომ $q_i = {p_i}^{\alpha_i} > d$ და q_i ყოფს $x + d_i$-ს. ამრიგად გვაქვს ცხრა ცალი მამრავლი $x + d_1, x + d_2, \ldots, x + d_9$ და რვა ცალი მარტივი რიცხვი 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 და 19, რომლებიც წარმოადგენენ $q_1, q_2, \ldots q_9$ ხარისხების ფუძეებს. ამიტომ არსებობს ორი მაინც განსხვავებული ინდექსი, i და j, ისეთი რომ q_i და q_j არის ერთი და იგივე მარტივი რიცხვის ხარისხი. სიმეტრიის მოსაზრებიდან გამომდინარე შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $q_i \leq q_j$. ამრიგად ვღებულობთ, რომ ორივე რიცხვი $x + d_i$ და $x + d_j$ იყოფა q_i-ზე, ე.ი. მათი სხვაობაც $x + d_i - (x + d_j) = d_i - d_j$ იყოფა q_i-ზე. ეს კი შეუძლებელია, ვინაიდან $0 < |d_i - d_j| \leq max\,(d_i, d_j) \leq d < q_i$. ამრიგად მივიღეთ წინააღმდეგობა, ანუ ჩვენი დაშვება რომ რომელიღაცა ნატურალური $x > d^8$, $P(x)$ - ს არ გააჩნია მარტივი გამყოფი, რომელიც მეტია 20-ზე ყოფილა მცდარი. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

ამოხსნის ეტაპები

ა) შენიშნა, რომ ფაქტს, არსებობს 20-ზე ნაკლები მხოლოდ 8 ცალი მარტივი რიცხვი, კავშირი აქვს ამოცანის ამოხსნასთან;
ბ) დაუშვა საწინააღმდეგო და წარმოადგინა პოლინომის თანამამრავლები, როგორც პირველ რვა მარტივ რიცხვთა ხარისხების ნამრავლი;
გ) დაადგინა ის ფაქტი, რომ ყოველი i-თვის, $1 \leq i \leq 9$, $x + d_i$-ს დაშლაში მარტივ მამრავლებად, მონაწილეობს ხარისხი, რომელიც მეტია d -ზე.
დ) შენიშნა, რომ არსებობს გ) პუნქტში ნახსენები ორი მაინც ხარისხი, რომელთაც საერთო ფუძე აქვთ;
ე) დ)-ს გამოყენებით მივიდა წინააღმდეგობამდე.

შეფასების სქემა

1 ქულა- ა)
3 ქულა- ა), ბ)
5 ქულა- ა), ბ), გ)
6 ქულა- ა), ბ), გ), დ)
7 ქულა- ა), ბ), გ), დ), ე)